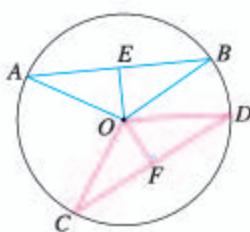


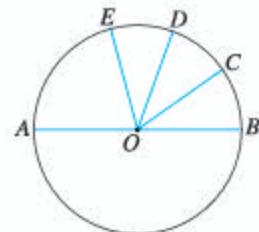
练习

1. 如图, AB , CD 是 $\odot O$ 的两条弦.

- (1) 如果 $AB=CD$, 那么 _____, _____.
- (2) 如果 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$, 那么 _____, _____.
- (3) 如果 $\angle AOB=\angle COD$, 那么 _____, _____.
- (4) 如果 $AB=CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, 垂足分别为 E , F , OE 与 OF 相等吗? 为什么?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}$, $\angle COD=35^\circ$. 求 $\angle AOE$ 的度数.

24.1.4 圆周角

在圆中, 除圆心角外, 还有一类角 (如图 24.1-11 中的 $\angle ACB$), 它的顶点在圆上, 并且两边都与圆相交, 我们把这样的角叫做圆周角 (angle in a circular segment).

如图 24.1-11, 连接 AO , BO , 得到圆心角 $\angle AOB$. 可以发现, $\angle ACB$ 与 $\angle AOB$ 对着同一条弧 \widehat{AB} , 它们之间存在什么关系呢? 下面我们就来研究这个问题.

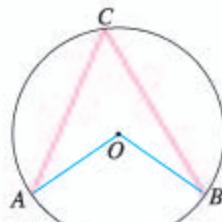


图 24.1-11



探究

分别测量图 24.1-11 中 \widehat{AB} 所对的圆周角 $\angle ACB$ 和圆心角 $\angle AOB$ 的度数, 它们之间有什么关系?

在 $\odot O$ 上任取一条弧, 作出这条弧所对的圆周角和圆心角, 测量它们的度数, 你能得出同样的结论吗? 由此你能发现什么规律?

可以发现，同弧所对的圆周角的度数等于这条弧所对的圆心角的度数的一半.

如图 24.1-12，为了证明上面发现的结论，在 $\odot O$ 任取一个圆周角 $\angle BAC$ ，沿 AO 所在直线将圆对折，由于点 A 的位置不同，折痕会：

- (1) 在圆周角的一条边上；
- (2) 在圆周角的内部；
- (3) 在圆周角的外部.

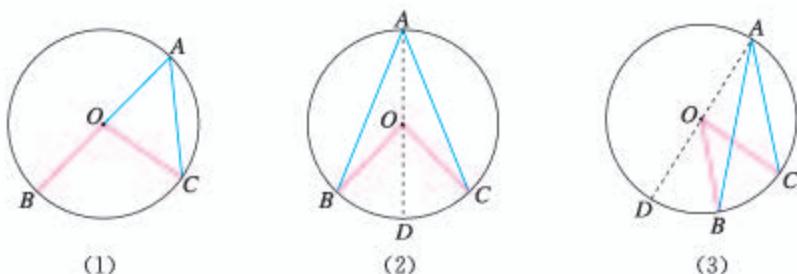


图 24.1-12

我们来分析第(1)种情况. 如图 24.1-12(1)，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一条边上.

$$\begin{aligned} OA=OC \Rightarrow \angle A=\angle C \\ \angle BOC=\angle A+\angle C \end{aligned} \Rightarrow \angle A=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

对于第(2)(3)种情况，可以通过添加辅助线(图 24.1-12(2)(3))，将它们转化为第(1)种情况，从而得到相同的结论(请你自己完成证明).

这样，我们就得到圆周角定理：

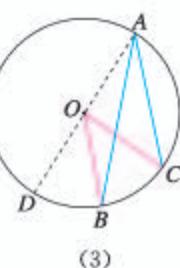
一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

进一步，我们还可以得到下面的推论(请你自己完成证明)：

同弧或等弧所对的圆周角相等.

半圆(或直径)所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径 (图 24.1-13).

利用一些计算机软件，可以很方便地度量圆周角、圆心角，有条件的同学可以试一下.



符号“ \Rightarrow ”读作“推出”，“ $A \Rightarrow B$ ”表示由条件 A 推出结论 B .

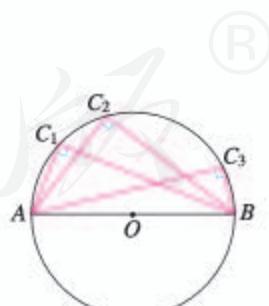


图 24.1-13

例4 如图 24.1-14, $\odot O$ 的直径 AB 为 10 cm, 弦 AC 为 6 cm, $\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 求 BC , AD , BD 的长.

解: 如图 24.1-15, 连接 OD .

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm}).$$

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ACD = \angle BCD$,

$\therefore \angle AOD = \angle BOD$.

$\therefore AD = BD$.

又 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

$$\therefore AD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10 = 5\sqrt{2}(\text{cm}).$$

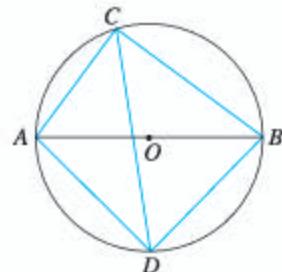


图 24.1-14

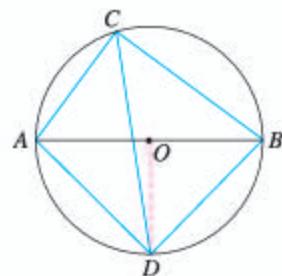


图 24.1-15

如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上, 这个多边形叫做**圆内接多边形**, 这个圆叫做这个**多边形的外接圆**. 如图 24.1-16, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\odot O$ 是四边形 $ABCD$ 的外接圆.

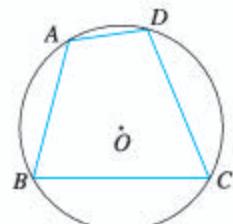


图 24.1-16



思考

圆内接四边形的四个角之间有什么关系?

因为圆内接四边形的每一个角都是圆周角, 所以我们可以利用圆周角定理, 来研究圆内接四边形的角之间的关系.

如图 24.1-17, 连接 OB , OD .

$\because \angle A$ 所对的弧为 \widehat{BCD} , $\angle C$ 所对的弧为 \widehat{BAD} ,

又 \widehat{BCD} 和 \widehat{BAD} 所对的圆心角的和是周角,

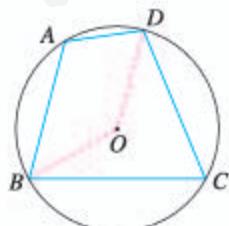


图 24.1-17

$$\therefore \angle A + \angle C = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

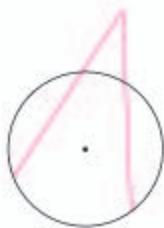
同理 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

这样，利用圆周角定理，我们得到圆内接四边形的一个性质：

圆内接四边形的对角互补.

练习

1. 判断下列图形中的角是不是圆周角，并说明理由：



(1)



(2)



(第 1 题)

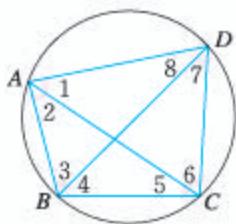


(4)

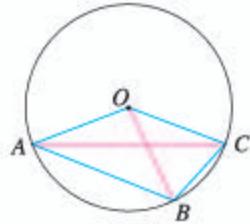


(5)

2. 如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 把它的 4 个内角分成 8 个角，这些角中哪些相等？为什么？



(第 2 题)



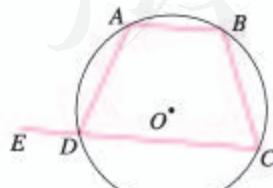
(第 3 题)

3. 如图， OA , OB , OC 都是 $\odot O$ 的半径， $\angle AOB = 2\angle BOC$. 求证： $\angle ACB = 2\angle BAC$.

4. 如图，你能用三角尺确定一张圆形纸片的圆心吗？有几种方法？与同学交流一下。



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, E 为 CD 延长线上一点. 若 $\angle B = 110^\circ$, 求 $\angle ADE$ 的度数.

1.5 有理数的乘方

1.5.1 乘方

前面学了有理数的乘法，下面研究各个乘数都相同时的乘法运算.

我们知道，边长为 2 cm 的正方形的面积是 $2 \times 2 = 4 (\text{cm}^2)$ ；棱长为 2 cm 的正方体的体积是 $2 \times 2 \times 2 = 8 (\text{cm}^3)$.

2×2 , $2 \times 2 \times 2$ 都是相同因数的乘法.

为了简便，我们将它们分别记作 2^2 , 2^3 . 2^2 读作“2 的平方”（或“2 的二次方”）， 2^3 读作“2 的立方”（或“2 的三次方”）.

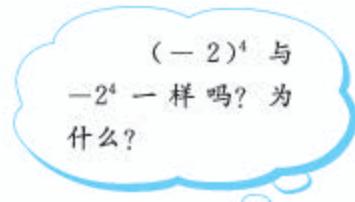
同样：

$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ 记作 $(-2)^4$,

读作“-2 的四次方”；

$(-\frac{2}{5}) \times (-\frac{2}{5}) \times (-\frac{2}{5}) \times (-\frac{2}{5}) \times (-\frac{2}{5})$ 记

作 $(-\frac{2}{5})^5$ ，读作“ $-\frac{2}{5}$ 的五次方”.



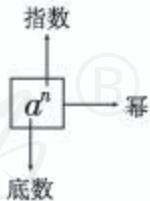
一般地， n 个相同的因数 a 相乘，即
 $\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}}$ ，记作 a^n ，读作“ a 的 n 次方”.

求 n 个相同因数的积的运算，叫做**乘方**，乘方的结果叫做**幂** (power). 在 a^n 中， a 叫做**底数** (base number)， n 叫做**指数** (exponent)，当 a^n 看作 a 的 n 次方的结果时，也可读作“ a 的 n 次幂”.

例如，在 9^4 中，底数是 9，指数是 4， 9^4 读作“9 的 4 次方”，或“9 的 4 次幂”.

一个数可以看作这个数本身的一次方. 例如，5 就是 5^1 . 指数 1 通常省略不写.

因为 a^n 就是 n 个 a 相乘，所以可以利用有理数的乘法运算来进行有理数的乘方运算.



例 1 计算：

$$(1) (-4)^3; \quad (2) (-2)^4; \quad (3) \left(-\frac{2}{3}\right)^3.$$

解：(1) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$;

(2) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$;

$$(3) \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}.$$



思考

从例 1，你发现负数的幂的正负有什么规律？

当指数是_____数时，负数的幂是_____数；

当指数是_____数时，负数的幂是_____数。

根据有理数的乘法法则可以得出：

负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数。

显然，**正数的任何次幂都是正数，0 的任何正整数次幂都是 0。**

例 2 用计算器计算 $(-8)^5$ 和 $(-3)^6$ 。

解：用带符号键 $(-)$ 的计算器。

$\boxed{(-)} \boxed{8} \boxed{\wedge} \boxed{5} \boxed{=}$

显示： $(-8)^5$

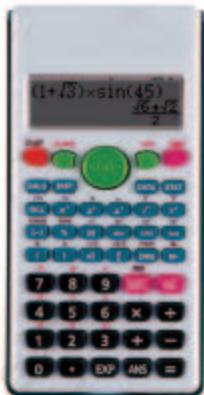
-32768.

$\boxed{(-)} \boxed{3} \boxed{\wedge} \boxed{6} \boxed{=}$

显示： $(-3)^6$

729.

所以 $(-8)^5 = -32768$, $(-3)^6 = 729$.



练习

1. (1) $(-7)^8$ 中，底数、指数各是什么？

(2) $(-10)^8$ 中-10 叫做什么数？8 叫做什么数？ $(-10)^8$ 是正数还是负数？

2. 计算：

$$(1) (-1)^{10}; \quad (2) (-1)^7; \quad (3) 8^3; \quad (4) (-5)^3;$$



思考

在图 5.2-1 转动木条 a 的过程中，有几个位置使得直线 a 与 b 平行？如图 5.2-3，过点 B 画直线 a 的平行线，能画出几条？再过点 C 画直线 a 的平行线，它和前面过点 B 画出的直线平行吗？

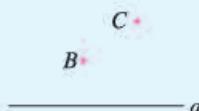


图 5.2-3

通过观察和画图，可以发现一个基本事实（平行公理）：

经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行。

由平行公理，进一步可以得到如下结论：

如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。

也就是说：如果 $b \parallel a$, $c \parallel a$, 那么 $b \parallel c$ （图 5.2-4）。

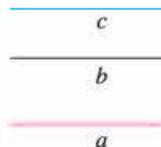


图 5.2-4

练习

读下列语句，并画出图形：

- (1) 点 P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P ，且与直线 AB 平行；
- (2) 直线 AB , CD 是相交直线，点 P 是直线 AB , CD 外的一点，直线 EF 经过点 P 且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 E .

5.2.2 平行线的判定

根据平行线的定义，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行。但是，由于直线无限延伸，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据定义来判断两条直线是否平行。那么，有没有其他判定方法呢？



思考

我们以前已学过用直尺和三角尺画平行线（图 5.2-5）。在这一过程中，三角尺起着什么样的作用？

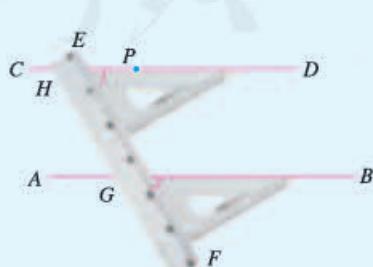


图 5.2-5

简化图 5.2-5 得到图 5.2-6. 可以看出，画直线 AB 的平行线 CD ，实际上就是过点 P 画与 $\angle 2$ 相等的 $\angle 1$ ，而 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 正是直线 AB , CD 被直线 EF 截得的同位角。这说明，如果同位角相等，那么 $AB \parallel CD$ 。

一般地，有如下利用同位角判定两条直线平行的方法：

判定方法 1 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行。

简单说成：**同位角相等，两直线平行。**

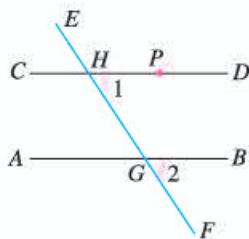


图 5.2-6

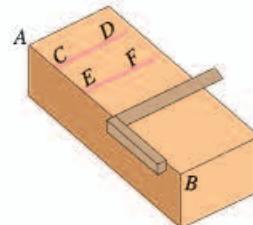


图 5.2-7

如图 5.2-7，你能说出木工用图中的角尺画平行线的道理吗？



思考

两条直线被第三条直线所截，同时得到同位角、内错角和同旁内角。由同位角相等，可以判定两条直线平行，那么能否利用内错角，或同旁内角来判定两条直线平行呢？

如图 5.2-8，如果 $\angle 2 = \angle 3$ ，能得出 $a \parallel b$ 吗？

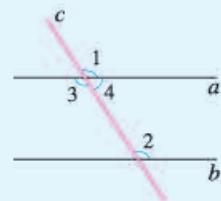


图 5.2-8

因为 $\angle 2 = \angle 3$ ，而 $\angle 3 = \angle 1$ （为什么？），所以 $\angle 1 = \angle 2$ ，即同位角相等，从而 $a \parallel b$ 。这样，由判定方法 1，可以得出利用内错角判定两条直线平行的方法：

判定方法 2 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行。

简单说成：**内错角相等，两直线平行。**

利用同旁内角，有判定两条直线平行的第三种方法：

判定方法 3 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行。

简单说成：同旁内角互补，两直线平行.



探究

遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题。这一节中，我们是怎样利用“同位角相等，两直线平行”得到“内错角相等，两直线平行”的？你能利用“同位角相等，两直线平行”或“内错角相等，两直线平行”得到“同旁内角互补，两直线平行”吗？

例 在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗？为什么？

分析： 垂直总与直角联系在一起，进而用判断两条直线平行的方法进行判定。

答： 这两条直线平行。理由如下：

如图 5.2-9.

$$\because b \perp a,$$

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ.$$

$$\text{同理 } \angle 2 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$\because \angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同位角，

$\therefore b \parallel c$ (同位角相等，两直线平行).

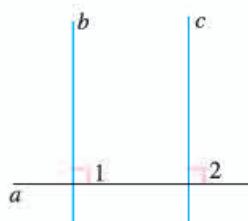


图 5.2-9

此处符号 “ \because ” 表示“因为”，符号 “ \therefore ” 表示“所以”。

你还能利用其他方法说明 $b \parallel c$ 吗？

练习

1. 如图， BE 是 AB 的延长线。

(1) 由 $\angle CBE = \angle A$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

(2) 由 $\angle CBE = \angle C$ 可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

2. 在铺设铁轨时，两条直轨必须是互相平行的。如图，已经知道 $\angle 2$ 是直角，那么再度量图中已标出的哪个角，就可以判断两条直轨是否平行？为什么？



(第 1 题)